DAA-TECHNIKUM

Fortbildungslehrgang Staatlich geprüfter Techniker (m/w/d)

Auszug aus dem Lernmaterial

Mathematik

Lernmaterial

3.3 Klammerrechnen und Faktorisieren

Kommen in einem Term Verknüpfungen, d.h. mathematische Operationen verschiedener „Hierarchiestufen“ vor, so hängt das Ergebnis entscheidend von der Reihenfolge der durchgeführten Rechenoperationen ab. Dabei sind wichtige Regeln zu beachten, von denen bereits folgende bekannt sind:

- Punktrechnung (Multiplikation und Division) geht vor Strichrechnung (Addition und Subtraktion.

  Beispiel: $5 \cdot 3 + 9 = 15 + 9 = 24$

- Was in der Klammer steht, wird zuerst gerechnet.

  Beispiel: $10 + (25 - 15) = 10 + 10 = 20$

Darüber hinaus hat man Klammern eingeführt, um zusammenhängende Rechenoperationen mit noch höherer Priorität hervorzuheben.

Man unterscheidet drei verschiedene Klammerebenen:

- Die **runden Klammern** stellen die unterste Ebene dar ( ).
- Die nächst höhere ist die **eckige Klammer** [ ].
- Die Klammer mit der höchsten Priorität ist die **geschweifte Klammer** { }.

Grundsätzlich gilt die Regel: Was in der Klammer steht wird zuerst berechnet.

Sind in einem Term Klammern verschiedener Ebenen vorhanden, so wird grundsätzlich immer erst die Klammer mit der niedrigsten Stufe aufgelöst (**von innen nach außen).**

<u>Lehrbeispiel 1</u>

Berechnen Sie die Summen und vergleichen Sie:

$17 + (-3 + 18)$ und $17 - 3 + 18$

Lösung

$$17 + (-3 + 18) = 17 + 15 = 32 \qquad 17 - 3 + 18 = 32$$

Antwort: Beide Terme ergeben die Zahl 32; sie sind also äquivalent.

Steht vor der Klammer ein Pluszeichen („Plusklammer“), so kann die Klammer weggelassen werden. Die Vorzeichen in der Klammer ändern sich nicht.

$$\begin{aligned} 4{,}5 + (1{,}5 - 3{,}5) &= 4{,}5 + 1{,}5 - 3{,}5 \\ &= 2{,}5 \\ -2a + (-3b + 4c) &= -2a - 3b + 4c \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 2

Berechnen und vergleichen Sie!

21 – (7 + 13) und 21 – 7 – 13

Lösung

21 – (7 + 13) = 21 – 20 = 1   21 – 7 – 13 = 1

Antwort: Beide Terme ergeben die Zahl 1; sie sind also äquivalent.

Steht vor der Klammer ein Minuszeichen („Minusklammer"), so müssen beim Auflösen der Klammer die Zeichen vor jedem Summanden in der Klammer umgekehrt werden.

$$\begin{aligned} 18 - (2 - 14) &= 18 - 2 + 14 \\ &= 30 \\ -5a - (-3b + 4c) &= -5a + 3b - 4c \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 3

Lösen Sie die Klammer auf und fassen Sie zusammen!

44ab – (–39cd + 17ab – 5) – 49cd

Lösung

Vor dem Zusammenfassen muss unbedingt die Klammer aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 44ab - (-39cd + 17ab - 5) - 49cd &= 44ab + 39cd - 17ab + 5 - 49\,cd \\ &= 27ab - 10cd + 5 \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 4

Berechnen Sie den Term $-(14x^4 - 17x) - (-14x + 17x^4) + (x - x^4)$ *!*

Lösung

Auch wenn vor der Klammer nur ein Minuszeichen steht (also kein weiterer Term), so handelt es sich doch auch um eine „Minusklammer" .

$$-(14x^4 - 17x) - (-14x + 17x^4) + (x - x^4) = -14x^4 + 17x + 14x - 17x^4 + x - x^4$$

$$= -32x^4 + 32x$$

Lehrbeispiel 5

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

5x + [–13y – (4x – 17y)]

Lösung

Hier ist die Regel zu beachten: Von innen nach außen auflösen; d.h. die eckige Klammer bleibt zunächst unberücksichtigt.

$5x + [-13y - (4x - 17y)] = 5x + [-13y - 4x + 17y] = 5x - 13y - 4x + 17y = x + 4y$

Lehrbeispiel 6

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$-\{-[12{,}8xy - (3{,}4yz + 5{,}6xy) - (-6{,}4xy + 12{,}4yz)] - xy\}$

Lösung

Bei einer Aufgabe dieser Komplexität ist es wichtig, die Auflösungsschritte sorgfältig nacheinander durchzuführen.

$-\{-[12{,}8xy - (3{,}4yz + 5{,}6xy) - (-6{,}4xy + 12{,}4yz)] - xy\}$

$= -\{-[12{,}8xy - 3{,}4yz - 5{,}6xy + 6{,}4xy - 12{,}4yz] - xy\}$

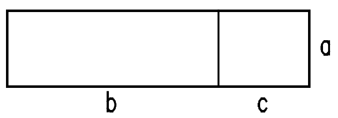
$= -\{-12{,}8xy + 3{,}4yz + 5{,}6xy - 6{,}4xy + 12{,}4yz - xy\}$

$= +12{,}8xy - 3{,}4yz - 5{,}6xy + 6{,}4xy - 12{,}4yz + xy$

$= 14{,}6xy - 15{,}8yz$

Lehrbeispiel 7

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks! Geben Sie zwei Lösungsterme an!



Lösung

1. Der Flächeninhalt des gesamten Rechtecks berechnet sich als Produkt beider Seitenlängen:

   $A = a \cdot (b + c)$

2. Der Flächeninhalt lässt sich jedoch auch als Summe der beiden Teilflächen berechnen:

   $A = a \cdot b + a \cdot c$

Da beide Flächeninhalte gleich groß sind, müssen auch die entsprechenden Terme gleich sein:

$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$

Distributivgesetz

Ein Term wird mit einer Summe multipliziert, indem er mit jedem Summanden der Summe multipliziert wird.

Das Malzeichen vor und hinter der Klammer kann weg gelassen werden.

$x \cdot (y - z) = xy - xz$

Für alle a, b, c $\in \mathbb{Q}$ gilt:

$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$

Lehrbeispiel 8

Multiplizieren Sie aus und fassen zusammen!

$-x(1{,}4 + y - x) - 3(6{,}2x - xy + x^2)$

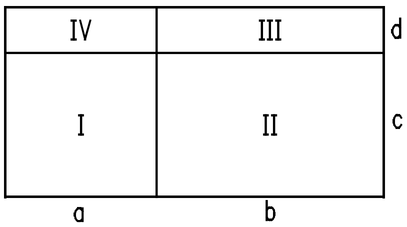
Lösung

Das Beachten der Vorzeichen der beiden Faktoren vor den Klammern ist wichtig.

$$\begin{aligned} & -x(1{,}4 + y - x) - 3(6{,}2x - xy + x^2) \\ = & -1{,}4x - xy + x^2 - 18{,}6x + 3xy - 3x^2 \\ = & -2x^2 - 20x + 2xy \end{aligned}$$

Lehrbeispiel 9

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks. Geben Sie zwei Lösungsterme an.



Lösung

1. Der Flächeninhalt des gesamten Rechtecks berechnet sich als Produkt beider Seitenlängen:

   $A = (a + b)\,(c + d)$

2. Der Flächeninhalt lässt sich jedoch auch als Summe der vier Teilflächen berechnen:

   $A = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}$

   $= a \cdot c + b \cdot c + b \cdot d + a \cdot d$

Da beide Flächeninhalte gleich groß sind, müssen auch die entsprechenden Terme äquivalent sein:

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Eine Summe wird mit einer Summe multipliziert, indem jeder Summand der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert wird und die Teilprodukte addiert werden.

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$

$(x - y)(r + s) = rx + sx - ry - sy$

$(x - y)(z - q) = xz - qx - yz + qy$

<u>Lehrbeispiel 10</u>

Multiplizieren Sie den folgenden Term aus!

$(x - 2 + 2a)(x + 5 - a)$

Lösung

Die oben erarbeitete Regel für die Multiplikation von Summen gilt auch dann, wenn in den Summentermen mehr als zwei Summanden stehen.

$(x - 2 + 2a)(x + 5 - a) = x^2 + 5x - ax - 2x - 10 + 2a + 2ax + 10a - 2a^2$

Beim Zusammenfassen und Ordnen ist darauf zu achten, dass die Variablenterme in alphabetischer Reihenfolge und mit dem größten Exponenten beginnend geordnet werden.

$= -2a^2 + 12a + ax + x^2 + 3x - 10$

<u>Lehrbeispiel 11</u>

Multiplizieren Sie aus und fassen zusammen!

$(a + 1)(a - 2)(a + 3)$

Lösung

Nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation fasst man zunächst zwei der drei Faktoren zusammen und multipliziert diese aus.

$[(a + 1)(a - 2)](a + 3) = [a^2 - 2a + a - 2](a + 3)$

Wenn möglich – wie in der eckigen Klammer – werden vor der nächsten Multiplikation gleichnamige Terme addiert.

$= [a^2 - a - 2](a + 3) = a^3 + 3a^2 - a^2 - 3a - 2a - 6 = a^3 + 2a^2 - 5a - 6$

Das Distributivgesetz der Multiplikation $a(b + c) = ab + ac$ kann nicht nur in der vorliegenden Reihenfolge angewendet werden. In vielen Aufgabenstellungen (z.B. Kürzen bei Bruchtermen) ist es notwendig, vorhandene Summenterme in Produkte umzuwandeln. Dabei muss man nur das Distributivgesetz von rechts nach links lesen.

Lehrbeispiel 12

Zerlegen Sie die Summe mithilfe des Distributivgesetzes in ein Produkt!

5a + 5b

Lösung

Der erste Lösungsschritt besteht darin, dass die Summanden auf gemeinsame Faktoren überprüft werden.

$\boxed{5}a + \boxed{5}b$

Wenn ein solcher gemeinsamer Faktor gefunden wurde, wird dieser **ausgeklammert** und die jeweiligen „Reste" der Summanden in eine Klammer geschrieben.

$= \boxed{5}(a + b)$

Diese „umgekehrte" Anwendung des Distributivgesetzes nennt man **Ausklammern** oder **Faktorisieren.**

Lehrbeispiel 13

Verwandeln Sie in ein Produkt!

–28an + 21bn – 56np

Lösung

Zunächst scheinen die Koeffizienten keinen gemeinsamen Faktor zu haben. Zur genauen Überprüfung werden sie in Primfaktoren zerlegt:

$$\begin{aligned} 28 &= 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{7} \\ 21 &= 3 \cdot \mathbf{7} \\ 56 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{7} \end{aligned}$$

ggT (28,21,56) = 7

Die Primfaktorzerlegung zeigt, dass der Faktor 7 in allen Koeffizienten vorkommt. Damit sieht der Summenterm wie folgt aus:

$$\begin{aligned} &-28an + 21bn - 56np \\ = &-4 \cdot \mathbf{7}\, a\, n + 3 \cdot \mathbf{7}\, b\, n - 8 \cdot \mathbf{7}\, n\, p \end{aligned}$$

Bei der Überprüfung der Variablen wird deutlich, dass der Faktor n ebenfalls in allen Summanden vorkommt.

$= -4 \cdot 7\, a\, \mathbf{n} + 3 \cdot 7\, b\, \mathbf{n} - 8 \cdot 7\, \mathbf{n}\, p$

Somit ergibt sich als auszuklammernder Faktor 7n.

$= \underline{7n(-4a + 3b - 8p)}$

Lehrbeispiel 14

Verwandeln Sie die Summe in ein Produkt!

$12a - 12$

Lösung

In beiden Summanden steht die Zahl 12; sie wird also faktorisiert.

$\mathbf{12}\,a - \mathbf{12} = \mathbf{12}\,a - \mathbf{12} \cdot 1$

Wichtig ist hier, dass beim zweiten Summanden unbedingt der Faktor 1 mitzudenken ist.

$= \underline{12\,(a - 1)}$

Würde die 1 in der Klammer vergessen, ergäbe sich beim Ausmultiplizieren nicht die ursprüngliche Summe.

Lehrbeispiel 15

Verwandeln Sie die Summe in ein Produkt, indem Sie den Faktor (–1) ausklammern!

$-x - y$

Lösung

In vielen Aufgabenstellungen ist es vorteilhaft, den Term so zu verändern, dass sich die Vorzeichen der Variablen ändern.

$-x - y = (-1)\,(x + y)$

Nun gibt es Summenterme, bei denen zunächst ein Faktorisieren nicht möglich erscheint. In der Summe $px + pz + qx + qz$ ist kein gemeinsamer Faktor aller vier Summanden zu erkennen. Bei genauerer Überprüfung ist aber festzustellen, dass in jeweils zwei Summanden ein gemeinsamer Faktor vorhanden ist.

$\mathbf{p}\,x + \mathbf{p}\,z + \boxed{q}\,x + \boxed{q}\,z$

Im ersten Lösungsschritt wird also aus jeweils zwei Summanden ausgeklammert.

$= p\,(x + z) + q\,(x + z)$

Jetzt wird deutlich, dass die beiden verbleibenden Summanden wiederum einen gemeinsamen Faktor haben.

$= p\,\mathbf{(x + z)} + q\,\mathbf{(x + z)}$

Da dieser gemeinsame Faktor ein Klammerterm ist, wird die gesamte Klammer $(x + z)$ faktorisiert.

$= \underline{(x + z)\,(p + q)}$

Lehrbeispiel 16

Verwandeln Sie in ein Produkt!

$2ax + 8ay - bx - 4by$

Lösung

$2ax + 8ay - bx - 4by$

$= 2a\,(x + 4y) - b\,(x + 4y)$

In der zweiten Klammer ist darauf zu achten, dass beim Ausmultiplizieren der ursprüngliche Term $-4by$ entsteht; in der Klammer muss der „Restterm“ 4y also mit einem Pluszeichen versehen werden.

Da beide Klammerterme wieder identisch sind, können diese faktorisiert werden.

$= \underline{(x + 4y)\,(2a - b)}$

Lehrbeispiel 17

Überprüfen Sie, ob die gegebene Summe in ein Produkt zu verwandeln ist!

$p^2 + 6pr + 8r^2$

Lösung

Zur Überprüfung dieser Frage sind folgende Voraussetzungen zu formulieren:

1. Wenn diese Summe als Produkt zweier Summenterme entstanden ist, müssen die ersten Summanden beider Klammern gleich sein.

   $p^2 + 6pr + 8r^2 = (\mathbf{p} \quad)\,(\mathbf{p} \quad)$

2. Die Variable des jeweils zweiten Summanden ist ebenfalls festgelegt.

   $= (p \quad \mathbf{r})\,(p \quad \mathbf{r})$

3. Nach der Regel über das Multiplizieren von Summentermen muss gelten:

   $(p \quad a_1\,r)\,(p \quad a_2\,r) = p^2 + 6pr + 8r^2$

Die beiden gleichnamigen Variablenterme pr müssen in ihrer **Summe +6pr** ergeben. Zugleich muss das **Produkt** der Koeffizienten der Variablen r +8 ergeben. Daraus ist zu folgern:

$+6 = a_1 + a_2$

$+8 = a_1 \cdot a_2$

Gesucht werden also zwei Zahlen, die in ihrer Summe +6 und als Produkt +8 ergeben.

Es gibt folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} +6 &= 1 + 5 \\ &= 2 + 4 \\ &= 3 + 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} +8 &= 1 \cdot 8 \\ &= 2 \cdot 4 \\ &= (-1) \cdot (-8) \\ &= (-2) \cdot (-4) \end{aligned}$$

Die Zahlenkombination $+6 = 2 + 4$ und $+8 = 2 \cdot 4$ erfüllt diese Voraussetzungen. Es ergibt sich als Lösung:

$p^2 + 6pr + 8r^2 = \underline{(p + 2r)\,(p + 4r)}$

Antwort: Der gegebene Summenterm lässt sich in ein Produkt umwandeln.

Lehrbeispiel 18

Faktorisieren Sie!

$a^2 - ay - 6y^2$

Lösung

1. Lösungsschritt: $a^2 - ay - 6y^2 = (a \quad y)\,(a \quad y)$

2. Lösungsschritt: $\begin{aligned} -6 &= (-1) \cdot 6 \\ &= (-2) \cdot 3 \\ &= 1 \cdot (-6) \\ &= 2 \cdot (-3) \end{aligned} \qquad -1 = 2 + (-3)$

Das Zahlenpaar +2/–3 erfüllt beide Bedingungen.

$a^2 - ay - 6y^2 = \underline{(a + 2y)\,(a - 3y)}$

Das Faktorisieren von Summentermen wird besonders bei der Addition und Multiplikation von Bruchtermen benötigt.

Lehrbeispiel 19

Bestimmen Sie die Definitionsmenge!

Die Grundmenge ist $G = \mathbb{Q}$.

$$\frac{5}{4a - 8}$$

Lösung

Da der Nenner des Bruchterms eine Summe ist, muss dieser zunächst faktorisiert werden.

$4a - 8 = \mathbf{4}a - 2 \cdot \mathbf{4} = 4(a - 2)$

Gesucht wird die Zahl, für deren Einsetzung in den Nennerterm dieser Null wird.

$4(\mathbf{a} - 2)$
$4(\mathbf{2} - 2) = 4 \cdot 0 = 0$

Antwort: Definitionsmenge $D = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$

<u>Lehrbeispiel 20</u>

Faktorisieren Sie den folgenden Term im Nenner und geben Sie die Definitionsmenge an!

$$\frac{25 - a}{a^2 - 19a}$$

Lösung

$a^2 - 19a = a(a - 19)$

In diesem Term ist folgende Regel zu beachten:

Ein Produkt aus zwei oder mehreren Faktoren (Termen) ist immer dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren (Terme) Null ist.

$a(a - 19)$

$0\,(0 - 19) = 0 \cdot (-19) = 0$

$19(19 - 19) = 19 \cdot 0 = 0$

Für zwei Einsetzungen wird der Nenner Null.

Antwort: $D = \mathbb{Q}\backslash\{0;\ 19\}$

<u>Lehrbeispiel 21</u>

Bestimmen Sie die Definitionsmenge!

$$\frac{5x}{(2x + 6)(x - 1)}$$

Lösung

$(2x + 6)(x - 1) \quad = \quad 2(x + 3)(x - 1)$

$2(-3 + 3)(-3 - 1) \quad = \quad 2 \cdot 0 \cdot (-4) = 0$

$2(1 + 3)(1 - 1) \quad = \quad 2 \cdot 4 \cdot 0 = 0$

Antwort: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-3; 1\}$

Für das Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen ist das Erweitern und Kürzen ein wesentlicher Bestandteil. Aus diesem Grunde sollen dazu zunächst einige Beispiele erläutert werden.

<u>Lehrbeispiel 22</u>

Geben Sie die Definitionsmenge an und erweitern Sie den Bruchterm!

$\frac{5}{2 + y}$ erweitert mit $y - 3$

Lösung

Da beim Erweitern Zähler und Nenner mit dem selben Term multipliziert werden, darf auch der Term, mit dem erweitert wird, nicht die Zahl Null bezeichnen.

$$\frac{5(y-3)}{(2+y)(y-3)} = \frac{5y-15}{2y-6+y^2-3y}$$
$$= \frac{5y-15}{y^2-y-6} \qquad y \neq 3,\ y \neq -2$$

<u>Lehrbeispiel 23</u>

Kürzen Sie den Bruchterm!

$$\frac{5a-35}{15a^2-105a}$$

Lösung

Bisher wurden nur Bruchterme behandelt, in denen keine Summen vorkamen. Im vorliegenden Beispiel bestehen Zähler und Nenner aus Summen. Hier ist folgende Regel zu beachten:

Aus Summen und Differenzen darf nicht gekürzt werden. Die Terme im Zähler und im Nenner müssen zunächst jeweils in Faktoren zerlegt werden.

$$\frac{5a-35}{15a^2-105a} = \frac{5(a-7)}{15a(a-7)} \qquad a \neq 7,\ a \neq 0$$

Erst wenn **im Zähler und im Nenner nur Faktoren** stehen, darf gekürzt werden. Auch hier gilt die Regel, dass beim Kürzen der Term, durch den gekürzt wird, nicht die Zahl Null bezeichnet.

$$\frac{{}^{1}\cancel{5}\cancel{(a-7)}^{1}}{\cancel{15}_{3}a\cancel{(a-7)}_{1}} = \frac{1}{3a}$$

<u>Lehrbeispiel 24</u>

Kürzen Sie den Bruchterm!

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-3x}$$

Lösung

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-3x} = \frac{{}^{1}\cancel{(x-3)}(x+3)}{x\cancel{(x-3)}_{1}} \qquad x \neq 0,\ x \neq 3$$

$$= \frac{x+3}{x}$$

<u>Lehrbeispiel 25</u>

Fassen Sie die Bruchterme zusammen!

$$\frac{10x}{x-1} + \frac{5}{2x}$$

Lösung

$$\frac{10x}{x-1} + \frac{5}{2x} \qquad x \neq 1,\ x \neq 0$$

Zunächst muss der Hauptnenner bestimmt werden. Da beide Nenner nicht weiter zerlegt werden können, ist der Hauptnenner

HN: $(x-1) \cdot 2x$

Anschließend werden beide Bruchterme gleichnamig gemacht; d.h. erweitert und addiert.

$$\frac{10x \cdot 2x}{(x-1)2x} + \frac{5(x-1)}{(x-1)2x} = \underline{\frac{20x^2+5x-5}{(x-1)2x}}$$

<u>Lehrbeispiel 26</u>

Machen Sie gleichnamig und fassen Sie zusammen!

$$\frac{x-2}{2x(x+1)} - \frac{x-3}{4(x+1)}$$

Lösung

$$\frac{x-2}{2x(x+1)}-\frac{x-3}{4(x+1)} \qquad x \neq 0,\ x \neq -1$$

$2x(x+1) \quad 2\cdot 2(x+1)$ **HN: 4x(x + 1)**

$$\frac{(x-2)2}{4x(x+1)}-\frac{(x-3)x}{4x(x+1)}$$

In diesem Lösungsschritt ist im Zähler des zweiten Bruches eine Klammer gesetzt worden, da es sich um eine Summe handelt, die mit dem Faktor x multipliziert wird.

$$\begin{aligned}\frac{2x-4-(x-3)x}{4x(x+1)} &= \frac{2x-4-x^2+3x}{4x(x+1)}\\ &= \frac{-x^2+5x-4}{4x(x+1)}\end{aligned}$$

<u>Lehrbeispiel 27</u>

Fassen Sie die Bruchterme zusammen!

$$\frac{4a}{5x-20}+\frac{6a}{3x-12}$$

Lösung

Zunächst müssen die Nenner faktorisiert werden.

5x – 20 = 5 (x – 4)

3x – 12 = 3 (x – 4) **HN: 5 · 3 (x – 4) = 15 (x – 4)**

$$\begin{aligned}\frac{4a}{5x-20}+\frac{6a}{3x-12} &= \frac{4a\cdot 3}{15(x-4)}+\frac{6a\cdot 5}{15(x-4)}\\ &= \frac{12a+30a}{15(x-4)}\\ &= \frac{{}^{14}\cancel{42}a}{{}_{5}\cancel{15}(x-4)}\\ &= \frac{14a}{5(x-4)} \qquad x \neq 4\end{aligned}$$

<u>Lehrbeispiel 28</u>

Fassen Sie zusammen!

$$\frac{4}{3x^2-4x}-\frac{2}{x^2+x}$$

Lösung

$3x^2 - 4x \;= x(3x - 4)$

$x^2 + x \quad = x(x + 1)$ **HN: x(3x – 4) (x + 1)**

$$\frac{4}{x(3x-4)} - \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4(x+1)}{x(3x-4)(x+1)} - \frac{2(3x-4)}{x(3x-4)(x+1)}$$
$$= \frac{4x+4-6x+8}{x(3x-4)(x+1)}$$

Beachten Sie das Minuszeichen vor dem Bruchstrich!

$$\frac{-2x+12}{x(3x-4)(x+1)} \qquad x \neq -1,\, x \neq \frac{4}{3},\, x \neq 0$$

Lehrbeispiel 29

Multiplizieren Sie die Bruchterme!

$$\frac{5y-45}{x+7} \cdot \frac{6x+42}{y-9}$$

Lösung

Da aus Summen und Differenzen nicht gekürzt werden darf, müssen die Zähler beider Bruchterme zunächst faktorisiert werden. Erst dann können **vollständige Summen** gekürzt werden.

$$\frac{5y-45}{x+7} \cdot \frac{6x+42}{y-9} = \frac{5(y-9)}{x+7} \cdot \frac{6(x+7)}{y-9}$$
$$= \frac{5\cancel{(y-9)}^{1} \cdot 6\cancel{(x+7)}^{1}}{{}_{1}\cancel{(x+7)}\cancel{(y-9)}_{1}} \qquad x \neq -7,\, y \neq 9$$
$$= 30$$

Lehrbeispiel 30

Dividieren Sie die folgenden Terme!

$$\frac{-36-18y}{-5x-5y} : \frac{-6-3y}{-x-y}$$

Lösung

$$\frac{-36-18y}{-5x-5y} : \frac{-6-3y}{-x-y} = \frac{-36-18y}{-5x-5y} \cdot \frac{-x-y}{-6-3y}$$
$$= \frac{(-36-18y)(-x-y)}{(-5x-5y)(-6-3y)}$$

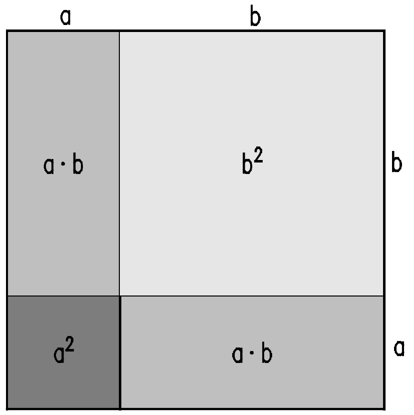
Wenn die Summenterme auf einen gemeinsamen Bruchstrich geschrieben werden, müssen unbedingt Klammern gesetzt werden.

$$= \frac{\overset{6}{\cancel{-18}}\,\overset{1}{\cancel{(2+y)}}\cdot(-1)\overset{1}{\cancel{(x+y)}}}{-5\underset{1}{\cancel{(x+y)}}\cdot\underset{1}{\cancel{(-3)}}\underset{1}{\cancel{(2+y)}}}$$

$$= \frac{6}{5} \qquad x \neq -y,\ y \neq -2$$

3.4 Binomische Formeln

Die 1. binomische Formel



Mit dem Term (a + b) (a + b) kann der Flächeninhalt des gesamten Quadrats mit der Seitenlänge (a + b) berechnet werden.

Wie aus der Abbildung 3 zu erkennen ist, lässt sich das gesamte Quadrat in vier Teilflächen zerlegen:

$a^2 + ab + ab + b^2$

Abbildung 3 Zerlegung eines Quadrates

Die beiden mittleren Terme lassen sich zu einem Term zusammenfassen, sodass folgender Lösungsterm für die 1. binomische Formel entsteht:

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b) &= \mathbf{(a + b)^2}\\ &= \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}\end{aligned}$$

1. binomische Formel

$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$

<u>Lehrbeispiel 1</u>

Wenden Sie die 1. binomische Formel an!

$(15r + 3s)^2$

Lösung

$$\begin{aligned}(15r + 3s)^2 &= 15r \cdot 15r + 2 \cdot 15r \cdot 3s + 3s \cdot 3s\\ &= \underline{\mathbf{225r^2 + 90\ rs + 9s^2}}\end{aligned}$$

Oft ist es notwendig, eine gegebene Summe in ein Produkt zu verwandeln (Faktorisieren).