

Fortbildungslehrgang Staatlich geprüfte! Techniker

Auszug aus dem Lernmaterial
**Maschinenbautechnische
Grundlagen**

2 Kräftesysteme

2.1 Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften

Man unterscheidet in der Statik zwei Kräftesysteme:

- das zentrale Kräftesystem und
- das allgemeine Kräftesystem.

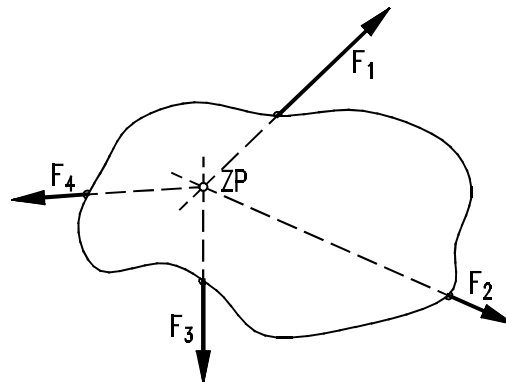
Ein zentrales Kräftesystem liegt vor, wenn beliebig viele Kräfte an einem Körper/Bauteil angreifen und ihre Wirkungslinien sich alle in einem Punkt, dem Zentralpunkt, schneiden.

Ein allgemeines Kräftesystem liegt vor, wenn beliebig viele Kräfte an einem Körper/Bauteil angreifen und ihre Wirkungslinien sich in mehr als einem Punkt schneiden.

Man erkennt aus dieser Definition, dass das zentrale Kräftesystem ein Sonderfall des allgemeinen Kräftesystems ist.

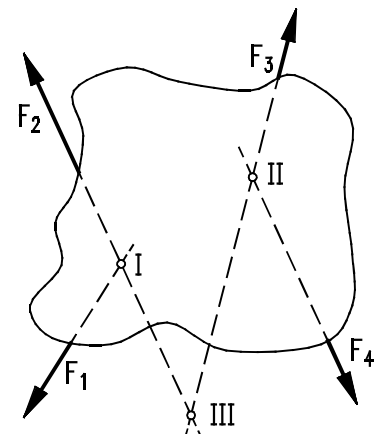
Folgende Darstellung verdeutlicht den Unterschied zwischen beiden Kräftesystemen:

Körper I: Zentrales Kräftesystem



ZP: Zentralpunkt
→ ein Schnittpunkt der WL

Körper II: Allgemeines Kräftesystem



I, II, III, ...: Schnittpunkte der WL der Kräfte
→ mehrere Schnittpunkte der WL

Abbildung 10 Zentrales und allgemeines Kräftesystem

Da beim zentralen Kräftesystem (Körper I) alle Kräfte mit ihren Wirkungslinien (WL) durch einen Punkt verlaufen, kann dieser Körper/dieses Bauteil nur verschoben werden, da kein Drehmoment bezüglich des Zentralpunktes existiert. Die Verschieberichtung wird in der Richtung zu erwarten sein, in die eine im Augenblick noch unbekannt resultierende Kraft wirkt.

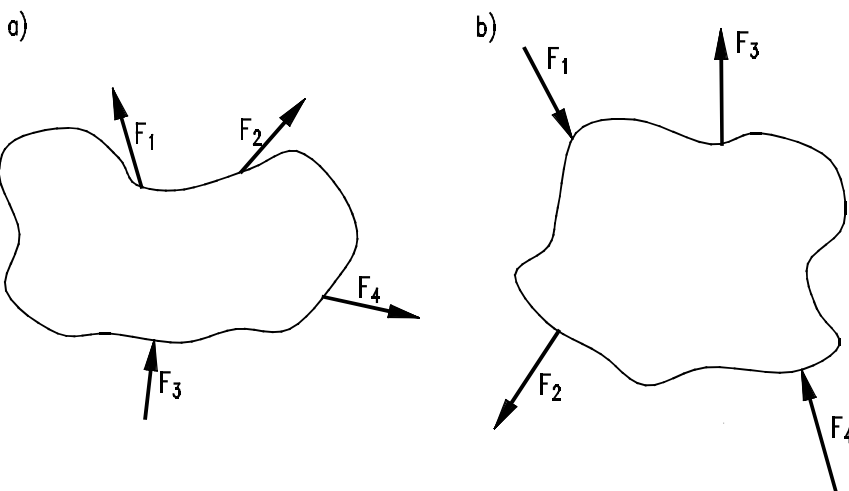
Wie aus der oberen Darstellung deutlich wird, existieren am Körper II mehrere Schnittpunkte der Wirkungslinien der Kräfte (I, II und III). Dabei liegt ein Schnittpunkt, nämlich der Schnittpunkt III, außerhalb des Körpers, was jedoch - wie man später sehen wird - unerheblich ist. Weitere Schnittpunkte können konstruktiv gefunden werden, z.B. indem man die WL von F_1 und F_4 zum Schnitt bringt oder aber die WL von F_1 und F_3 . Die Anzahl der gefundenen Schnittpunkte ist völlig ohne Bedeutung. Wichtig ist nur die Feststellung, dass mehrere Schnittpunkte der Wirkungslinien existieren!

Im Unterschied zum zentralen Kräftesystem kann man nun erwarten, dass die einzelnen Kräfte bezüglich festzulegender Punkte Momente (Drehmomente) entwickeln können, sodass beim allgemeinen Kräftesystem neben einer Verschiebung nun auch eine Verdrehung möglich ist.

Diese Überlegungen spielen bei der Untersuchung von Gleichgewichtszuständen eine entscheidende Rolle.

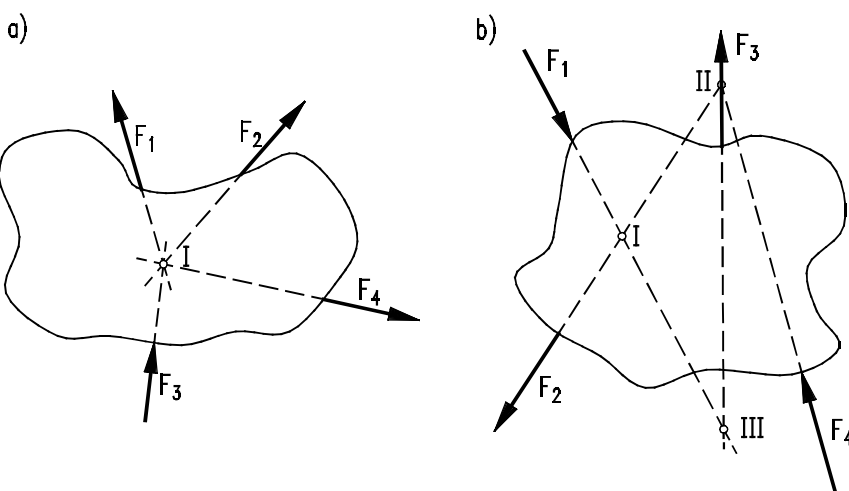
Lehrbeispiel 1

Um welches Kräftesystem handelt es sich bei der gegebenen Kräfteanordnung?



Lösung

Man zeichnet die WL in die Kräfte ein und überprüft, wie viele Schnittpunkte existieren.



I: Zentralpunkt
 → Nur Verschiebung möglich
 → Zentrales Kräftesystem

I,II,III,...: Schnittpunkte der WL der Kräfte
 → Verschiebung und Verdrehung möglich
 → Allgemeines Kräftesystem

Grundsätzlich stehen in der Statik zwei Lösungsmethoden zur Verfügung:

- zeichnerische Lösung
- rechnerische Lösung

Beide Lösungsmethoden haben ihre Vor- und Nachteile; sie sollen aber generell im Folgenden nebeneinander vorgestellt werden, da auf diese Weise diese Vor- und Nachteile sichtbar werden.

Ein Techniker sollte beide Lösungsmethoden beherrschen, obwohl bei den verschiedensten Aufgabenstellungen durchaus ein Lösungsweg ausreicht. Die Entscheidung, welcher Lösungsweg gewählt wird, die rechnerische oder die zeichnerische Lösung, bleibt in der Regel dem Techniker überlassen.

Oftmals wird sich zeigen, dass die zeichnerische Lösung der schnellere Weg zum Ergebnis ist; diesem Vorteil steht jedoch eine meist geringere Genauigkeit gegenüber, die vor allem vom gewählten Maßstab abhängig ist.

Im Weiteren werden folgende wichtige Grundoperationen und Verfahren im Umgang mit Kräften erarbeitet:

1. Zusammenfassen/Zerlegen von Kräften im Zentralen Kräftesystem (ZKS) - Zeichnerische Verfahren
2. Zusammenfassen/Zerlegen von Kräften im Zentralen Kräftesystem (ZKS) - Rechnerische Verfahren
3. Ermittlung der Resultierenden im Allgemeinen Kräftesystem (AKS) - Zeichnerisches Verfahren (Seileckverfahren)

Zu 1. Zusammenfassen/Zerlegen von Kräften

Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden zweier Kräfte

Parallelogrammkonstruktion

Zwei an einem Körperpunkt angreifende Kräfte F_1 und F_2 üben auf den Körper die gleiche Wirkung aus, wie eine einzelne Kraft, die als **resultierende Kraft F_{Res}** bezeichnet wird.

Die resultierende Kraft wird über die Konstruktion eines Parallelogramms gefunden. Das soll folgendes Beispiel verdeutlichen:

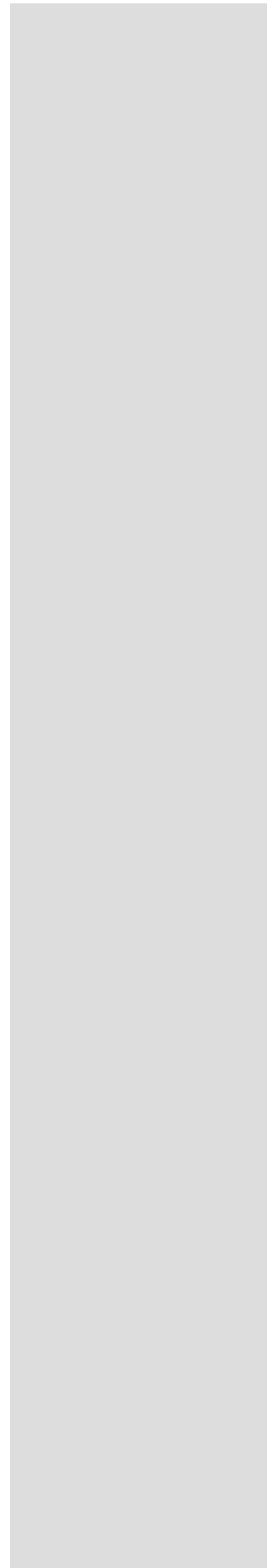
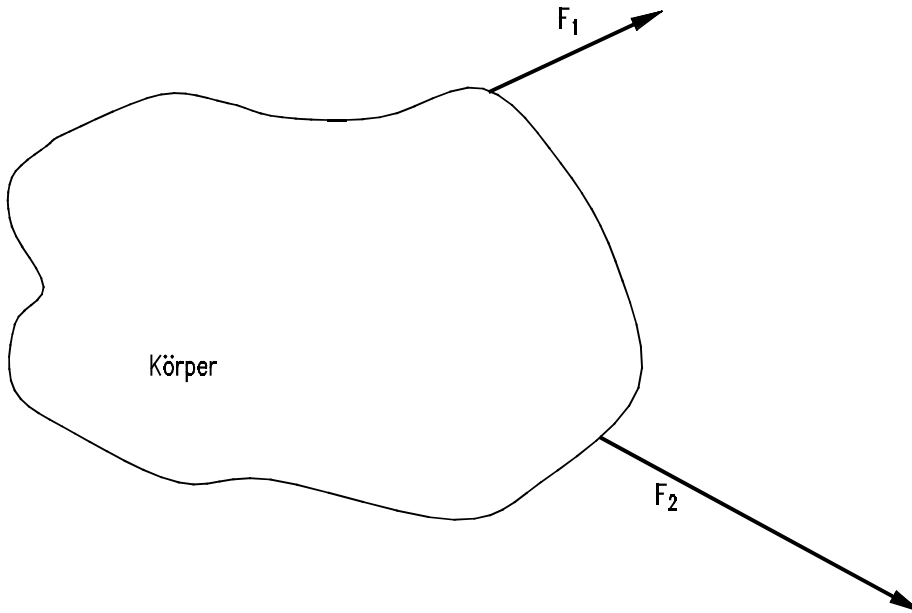
Lehrbeispiel 2: Konstruktion der resultierenden Kraft F_{Res}

Zwei Kräfte, F_1 und F_2 , wirken - wie der kombinierte Lage-/Kräfteplan winkelgetreu zeigt - an einem Körper. Die Kraft F_1 sei 25 N, die Kraft F_2 sei 48 N groß.

Ermitteln Sie den Angriffspunkt A, an dem die Kräfte wirken, und die Resultierende F_{Res} nach Lage, Größe und Richtung!

Lage-/Kräfteplan:

LM = nicht erforderlich, da ZKS
KM = 10 N/cm

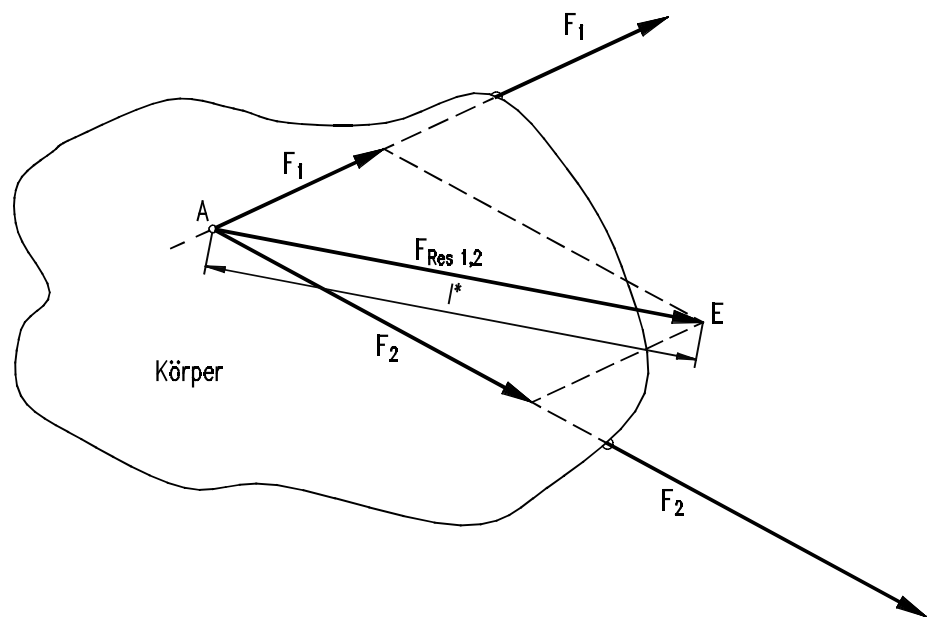


Zur Lösung der Aufgabe geht man folgendermaßen vor:

- Verlängerung der Wirkungslinien der Kräfte in die Fläche des Körpers hinein
- Wirkungslinien beider Kräfte zum Schnitt bringen! \Rightarrow Schnittpunkt A
- Verschieben beider Kräfte auf ihren Wirkungslinien nach A!
Merke: Kräfte dürfen auf ihren WL verschoben werden!
- Parallelogrammkonstruktion
 - Mithilfe zweier Dreiecke wird die Kraft F_2 parallel in die Pfeilspitze von F_1 verschoben (gestrichelte Linie!)
 - Auf gleichem Wege wird die Kraft F_1 in die Pfeilspitze von F_2 parallel verschoben (gestrichelte Linie!).
 - Beide konstruierten gestrichelten Linien werden zum Schnitt gebracht. Der Schnittpunkt wird als E (Endpunkt) bezeichnet.
 - Die Verbindungslinie von A nach E, vom Anfangspunkt zum Endpunkt, ist die Resultierende F_{Res} !
 - Über den Kräftemaßstab ergibt sich:
 $F_{Res} = l^* \cdot KM = 6,6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ N/cm} = \underline{66 \text{ N}}$

Lösung

LM = –
 KM = 10 N/cm



$$F_{Res} = l^* \cdot KM$$

$$F_{Res} = 6,6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ N/cm}$$

$$F_{Res 1,2} = 66 \text{ N}$$

Diese Methode ist einfach und übersichtlich und führt schnell zu einer Lösung. Sie wird jedoch zunehmend unübersichtlich, wenn auf diese Art und Weise mehrere Kräfte verarbeitet werden müssen. Dann müssen hintereinander mehrere Parallelogrammkonstruktionen ausgeführt werden - und das alles in einem Lage-/Kräfteplan, wodurch die Überschaubarkeit sehr in Mitleidenschaft gezogen wird.

Krafteckkonstruktion

Eine **schnellere und übersichtlichere Lösung** bietet in diesen Fällen die so genannte **Krafteckkonstruktion**.

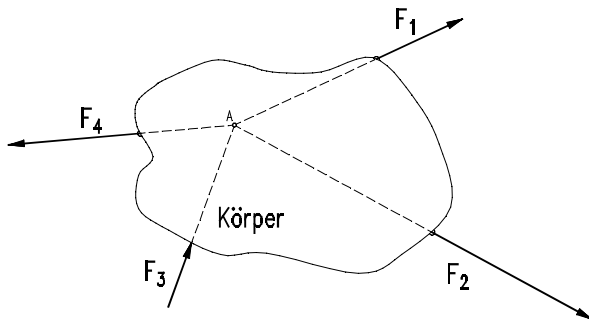
Die Kräfteverhältnisse des Lehrbeispiels 2 werden durch zwei weitere Kräfte, die Kraft F_3 und die Kraft F_4 , erweitert.

Lehrbeispiel 3: Konstruktion der Resultierenden einer Kräftegruppe

Vier Kräfte F_1, F_2, F_3 und F_4 wirken, wie der kombinierte Lage-/Kräfteplan **winkelgetreu** zeigt, an einem Körper. Die Kraft F_1 sei 25 N, die Kraft F_2 sei 48 N, die Kraft F_3 sei 18 N und die Kraft F_4 sei 35 N groß.

Ermitteln Sie den Angriffspunkt A, an dem die Kräfte wirken, und die Resultierende F_{Res} nach Lage, Größe und Richtung!

Lageskizze:



Bemerkungen zur Lösung

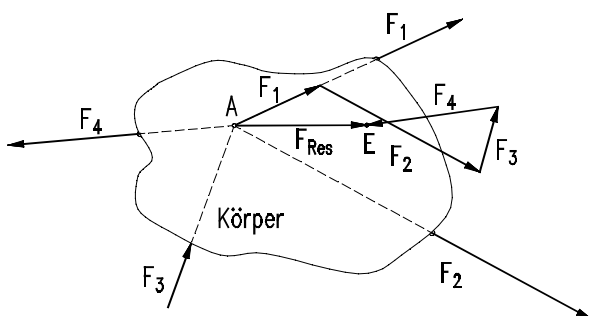
Da es sich um ein ZKS (Zentrales Kräftesystem) handelt, ist die Angabe eines Längenmaßstabes nicht erforderlich. Die Reihenfolge, in der die Kräfte geometrisch addiert werden, ist ohne Bedeutung. Jede gewählte Reihenfolge führt zur Lösung.

Es folgt die **geometrische Kräfteaddition**, bei der die Kräfte in der richtigen Richtung und in der richtigen Länge „aneinander gehängt“ werden.

Zur Lösung der Aufgabe geht man folgendermaßen vor:

- Verschiebung von F_1 bis in A; zeichnen von F_1 (2,5 cm lang!).
- Parallelverschiebung der WL von F_2 durch die Pfeilspitze von F_1 . Einzeichnen von F_2 in richtiger Länge (4,8 cm!).
- Parallelverschiebung der WL von F_3 durch die Pfeilspitze von F_2 .
- Einzeichnen von F_3 in richtiger Länge (1,8 cm!).
- Parallelverschiebung der WL von F_4 durch die Pfeilspitze von F_3 . Einzeichnen von F_4 in richtiger Länge (3,5 cm!).
- Punkt E - Endpunkt des Kräftezuges!
- Zeichnen der Verbindungslinie von A nach E.

$\Rightarrow F_{Res\ 1,2,3,4}$



Lösung

Lage-/Kräfteplan:

$KM = 20\text{ N/cm}$

$F_{Res} = 1,75\text{ cm} \cdot 20\text{ N/cm}$

$F_{Res} = 35\text{ N}$

Die Überlegungen zur Konstruktion einer Resultierenden sollen durch ein weiteres Lehrbeispiel vertieft werden.

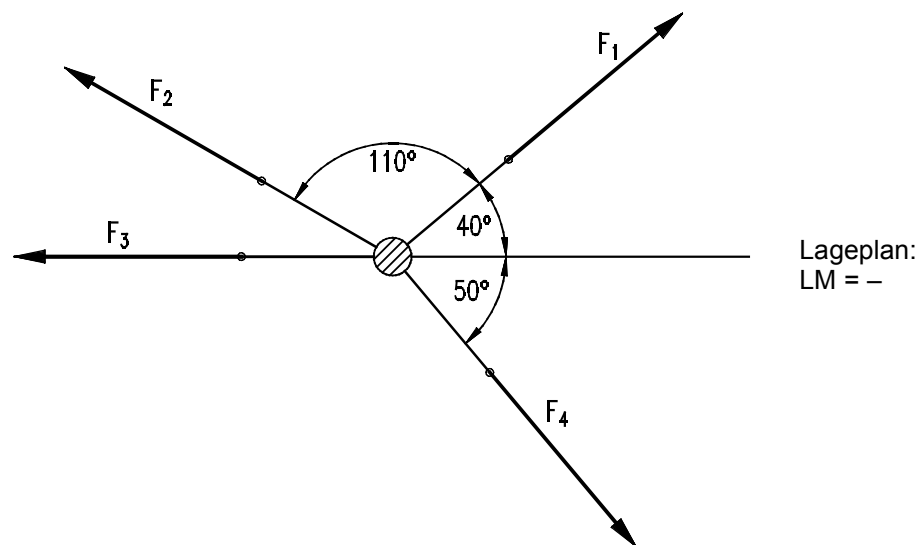
Lehrbeispiel 4

An einem Sendemast greifen vier waagerechte Seilkräfte

$$F_1 = 900 \text{ N} \quad F_2 = 800 \text{ N} \quad F_3 = 900 \text{ N} \quad F_4 = 800 \text{ N}$$

gemäß Skizze an.

Wie groß ist die Gesamtkraft auf den Mast und in welcher Richtung wirkt sie?



Bemerkungen zur Lösung

Zwei Lösungswege stehen für die grafische Lösung zur Verfügung:

- Parallelogrammverfahren
- Kräfteckverfahren

Gewählt wird in diesem Fall das Kräfteckverfahren, da es den schnelleren Weg zur Lösung eröffnet.

Da es sich um ein Zentrales Kräftesystem (ZKS) handelt, ist die Angabe eines Längenmaßstabes nicht erforderlich. Im Lageplan sind die Kräfte in ihrer wirklichen Lage, d.h. winkelgetreu, aufgetragen. Der Betrag, d.h. die Pfeillänge, ist im Lageplan noch unerheblich.

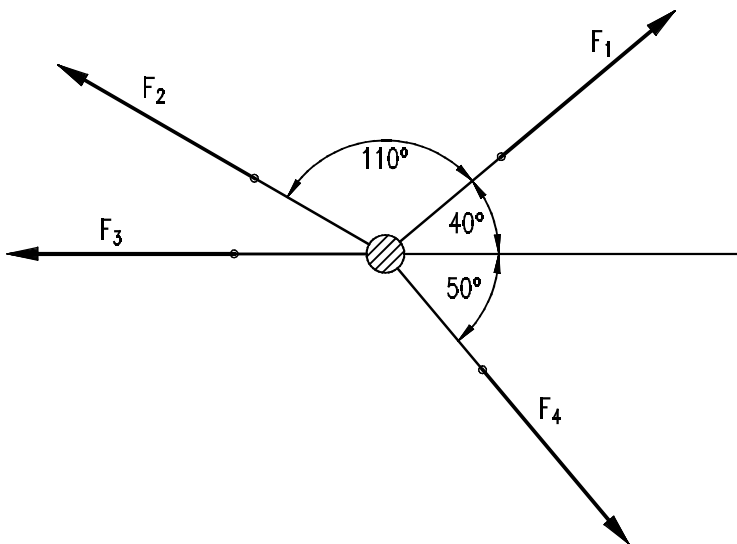
- Wahl des Kräftemaßstabes (den Maßstab so wählen, dass die zeichnerische Lösung auf dem DIN A 4-Blatt erfolgen kann!)
- Beachten Sie: Je größer der Maßstab gewählt wird, umso genauer ist die Lösung! Gewählt wird: $KM = 200 \text{ N/cm}$
- Anfangspunkt des Kräftezuges frei wählen und mit A bezeichnen!
- Bei der geometrischen Addition ist die Reihenfolge der Kräfte frei wählbar! Als Reihenfolge wird hier gewählt: F_1, F_4, F_3 und F_2 .
- Zeichnen der Kraft F_1 : Pfeillänge: $900 \text{ N} / 200 \text{ N/cm} = 4,5 \text{ cm}$. Dieser Kraftpfeil wird unter dem Winkel von 40° zur Horizontalen angetragen!

- Zeichnen der Kraft F_4 : Bei 800 N ergibt sich als Pfeillänge 4 cm. Die Richtung von F_4 wird aus dem Lageplan durch Parallelverschiebung in den Kräfteplan in die Pfeilspitze von F_1 übernommen.
- Zeichnen der Kraft F_3 : Bei 900 N ergibt sich als Pfeillänge wiederum 4,5 cm. Antragen von F_3 durch Parallelverschiebung in die Pfeilspitze von F_4 .
- Zeichnen der Kraft F_2 : Bei 800 N ergibt sich als Pfeillänge 4 cm. Die Richtung von F_2 wird aus dem Lageplan durch Parallelverschiebung in den Kräfteplan in die Pfeilspitze von F_3 übernommen.
- Endpunkt des Kräftezuges E!
- Zeichnen der Resultierenden $F_{Res\ 1,2,3,4}$ als Verbindungslinie von A nach E!
- Ermittlung des Betrages von $F_{Res\ 1,2,3,4}$:
 - Ausmessen der Länge l^* : 2,8 cm
 - Errechnen von $F_{Res\ 1,2,3,4} = 2,8\text{ cm} \cdot 200\text{ N/cm} = 560\text{ N}$
 - Ermittlung des Winkels $\alpha_{Res} = 49^\circ$

Lösung

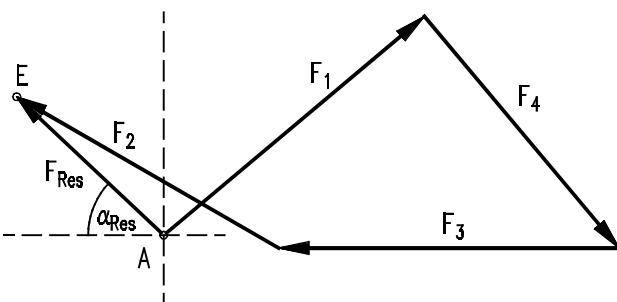
Lageplan:

LM = -



Kräfteplan:

KM = 200 N/cm



$$F_{Res} = l^*_{F_{Res}} \cdot KM$$

$$F_{Res} = 2,8\text{ cm} \cdot 200\text{ N/cm} = 560\text{ N}$$

$$\alpha_{Res} = 49^\circ$$

Zu 2. Zusammenfassen/Zerlegen von Kräften

Rechnerische Ermittlung der Resultierenden

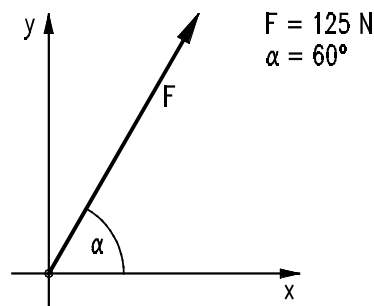
Für die rechnerische Ermittlung der Resultierenden im Zentralen Kräftesystem müssen die einzelnen Kräfte in ihre Komponenten in x- und y-Richtung mithilfe der Winkelfunktionen zerlegt werden.

Zerlegung einer einzelnen Kraft

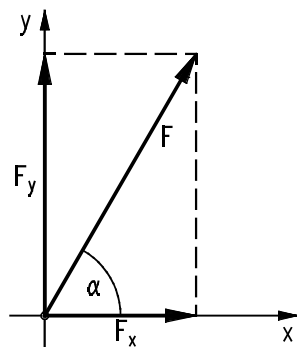
Gegeben sei eine Kraft F , die unter einem Winkel von $\alpha = 60^\circ$ (Skizze) zur positiven x-Achse wirkt.

Lageplan:

LM = –



Ermitteln Sie die Komponenten der Kraft F in x- und y-Richtung!



$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \cdot \cos \alpha = 125 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ$$

$$F_x = 62,5 \text{ N}$$

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \cdot \sin \alpha = 125 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ$$

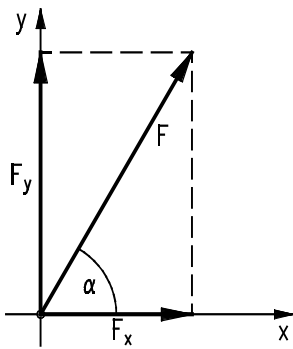
$$F_y = 125 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ$$

$$F_y = 108,25 \text{ N}$$

Mithilfe des Satzes von Pythagoras* kann aus Einzelkomponenten wieder die Ausgangskraft errechnet werden.

*Pythagoras: griechischer Philosoph und Mathematiker (570-496 v. Chr.)

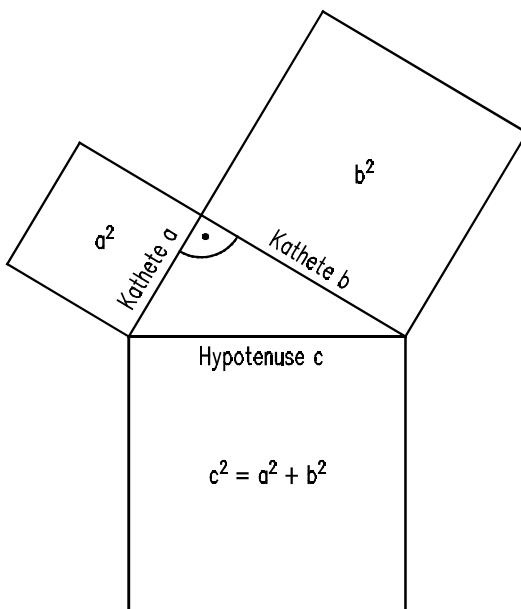
Man benutzt dazu die Skizze der Lösung der Kräftezerlegung:



Es gilt:

Satz von Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den Katheten!



Für diesen Fall ergibt sich:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

$$F^2 = (62,5^2 + 108,25^2) \text{ N}^2 = 15624,31 \text{ N}^2$$

Aus dieser Zahl zieht man die Quadratwurzel und es ergibt sich:

$$F = 125 \text{ N}$$

Damit sind die Grundlagen für die rechnerische Ermittlung der Resultierenden in einem ZKS gelegt.

Die Resultierende ergibt sich also nach folgender Gleichung:

$$F_{\text{Res } x} = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots F_{ix}$$

$$F_{\text{Res } y} = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots F_{iy}$$

$$F_{\text{Res}} = \sqrt{F_{\text{Res } x}^2 + F_{\text{Res } y}^2}$$

Die Richtung der Kraft ergibt sich aus:

$$\tan \alpha = \frac{F_{\text{Res } y}}{F_{\text{Res } x}}$$

Für die rechnerische Lösung dieses Problems müssen folgende Arbeitsschritte absolviert werden:

- Lageskizze fertigen (Kräfte in richtiger Richtung und ungefähr winkelgetreu einzeichnen!)
- Alle Kräfte zeichnerisch in x- und y-Komponenten zerlegen! Dabei auf die Richtung achten, denn bei der Addition der Komponenten müssen die Vorzeichen berücksichtigt werden.
- Die Einzelkomponenten der Kräfte in x- und y-Komponenten berechnen (Winkelfunktionen!).

- Die Einzelkomponenten aufaddieren:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots F_{ix} = F_{\text{Res } x} \\ \sum F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots F_{iy} = F_{\text{Res } y} \end{aligned}$$

- Berechnung der Resultierenden:

$$F_{\text{Res}} = \sqrt{F_{\text{Res } x}^2 + F_{\text{Res } y}^2}$$

- Berechnung des Winkels zur x-Achse der Resultierenden:

$$\tan \alpha = \frac{F_{\text{Res } y}}{F_{\text{Res } x}}$$

Die Aufgabe aus Lehrbeispiel 4 soll im Folgenden rechnerisch gelöst werden.

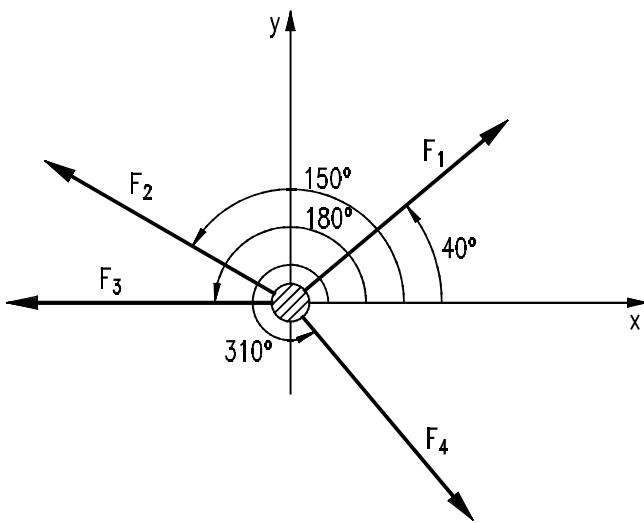
Lehrbeispiel 5

An einem Sendemast greifen vier waagerechte Seilkräfte

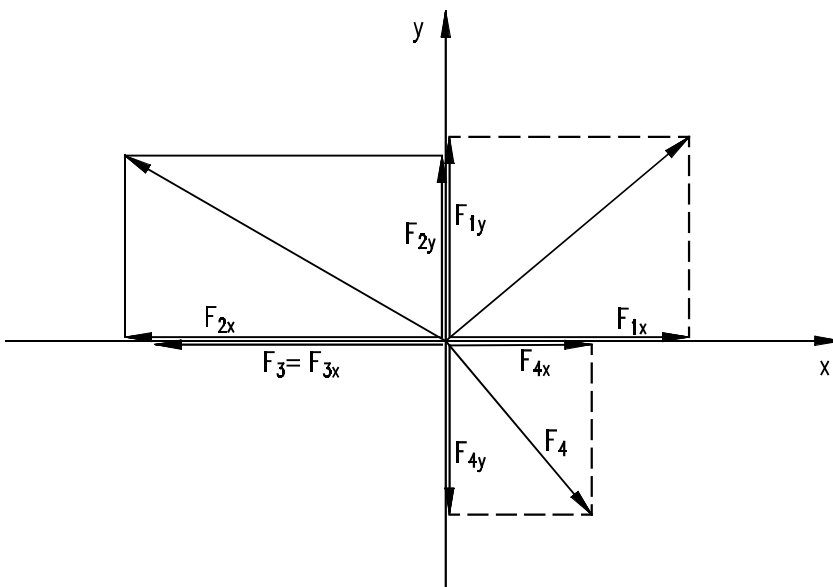
- $F_1 = 900 \text{ N}$ ($\alpha_1 = 40^\circ$)
- $F_2 = 800 \text{ N}$ ($\alpha_2 = 150^\circ$)
- $F_3 = 900 \text{ N}$ ($\alpha_3 = 180^\circ$)
- $F_4 = 800 \text{ N}$ ($\alpha_4 = 310^\circ$)

gemäß Skizze an. Die angegebenen Winkel wurden von der positiven x-Achse aus gemessen.

Wie groß ist die Gesamtkraft auf den Mast und in welcher Richtung wirkt sie?



Lösung



$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 900 \text{ N} \cdot \cos 40^\circ = +689,44 \text{ N} \\
 F_{2x} &= F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 800 \text{ N} \cdot \cos 150^\circ = -692,82 \text{ N} \\
 F_{3x} &= F_3 = -900 \text{ N} \\
 F_{4x} &= F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 800 \text{ N} \cdot \cos 310^\circ = 514,23 \text{ N} \\
 F_{\text{Res } x} &= \sum F_{ix} = (+689,44 - 692,82 - 900 + 514,23) \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{F_{\text{Res } x} = -389,15 \text{ N}}}$$

$$\begin{aligned}
 F_{1y} &= F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 900 \text{ N} \cdot \sin 40^\circ = 578,51 \text{ N} \\
 F_{2y} &= F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 800 \text{ N} \cdot \sin 150^\circ = 400 \text{ N} \\
 F_{3y} &= F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 900 \text{ N} \cdot \sin 180^\circ = 0 \text{ N} \\
 F_{4y} &= F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 800 \text{ N} \cdot \sin 310^\circ = -612,84 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{F_{\text{Res } y} = +365,67 \text{ N}}}$$

F_{Res} liegt im II. Quadranten

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Res}} &= \sqrt{(-389,15^2 + 365,67^2) \text{ N}^2} \\
 F_{\text{Res}} &= \sqrt{(151437,72 + 133714,55) \text{ N}^2} \\
 F_{\text{Res}} &= \sqrt{285152,27 \text{ N}^2}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{F_{\text{Res}} = 534,0 \text{ N}}}$$

$$\tan \alpha_{\text{Res}} = \frac{|F_{\text{Res } y}|}{|F_{\text{Res } x}|} = \frac{|365,67|}{|-389,15|} = +0,9397$$

$$\underline{\underline{\alpha_{\text{Res}} = 43,2^\circ}}$$

Vergleicht man die Ergebnisse der zeichnerischen und der rechnerischen Lösung, so stellt man fest, dass die zeichnerische Lösung natürlich etwas ungenau ist. Dafür ist jedoch der Aufwand zum Teil erheblich geringer als bei der rechnerischen Lösung.

Zusammenfassung:

Rechnerische Ermittlung von resultierenden Kräften im ZKS (zentralen Kräfte-system)

1. Arbeitsschritt

- Kräfteverhältnisse im Koordinatensystem skizzieren
- Kräfte in x- und y-Komponenten zeichnerisch zerlegen
- alle Winkel als Winkel von der positiven x-Achse vermaßen

2. Arbeitsschritt

- Berechnung der Komponenten in x-Richtung
- Berechnung der Komponenten in y-Richtung

3. Arbeitsschritt

- Betrag der resultierenden Kraft mit dem Satz des Pythagoras bestimmen
- Lage der resultierenden Kraft mithilfe der Winkelfunktionen berechnen

Hinweis zum Gleichgewicht:

Im ZKS ist die Gleichgewichtskraft diejenige Kraft, die das Kräfteck schließt! Sie hat die Größe der resultierenden Kraft, besitzt die gleiche Wirkungslinie, ist aber entgegengesetzt gerichtet!

Das Lehrbeispiel 6 soll dazu dienen, die gelernten Verfahren noch einmal im Zusammenhang anzuwenden.

Lehrbeispiel 6

An einem Lagerpunkt sind drei Streben verankert, die das Lager belasten. Die Kräfte in den einzelnen Streben haben folgende Größe:

$$F_1 = 140 \text{ N}$$

$$F_2 = 220 \text{ N}$$

$$F_3 = 165 \text{ N}$$

Ermitteln Sie die Gesamtbelastungskraft F_{Res} für das Lager A und den Winkel α_{Res} zur Waagerechten zeichnerisch und rechnerisch!

